

Processamento de Malhas Poligonais

Tópicos Avançados em Computação Visual e Interfaces I

Prof.: Marcos Lage

www.ic.uff.br/~mlage

mlage@ic.uff.br

Conteúdo: Notas de Aula

Representação de Superfícies: Definições Matemáticas

Definição de Superfície:

Uma superfície é uma *variedade de dimensão 2, contínua e orientável* imersa em \mathbb{R}^3 .

Definição de Superfície:

Uma superfície é uma *variedade de dimensão 2, contínua e orientável* imersa em \mathbb{R}^3 .

Intuição ...

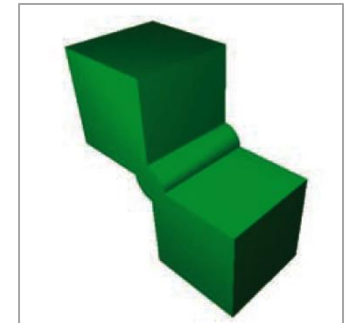
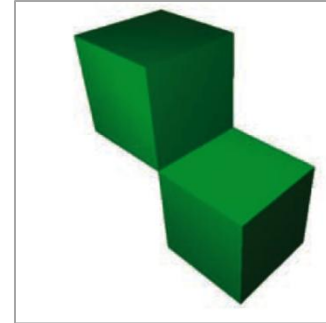
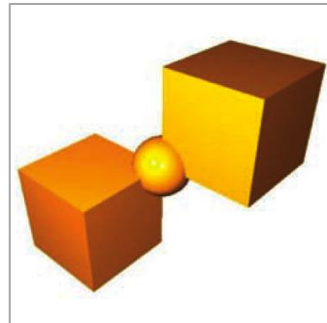
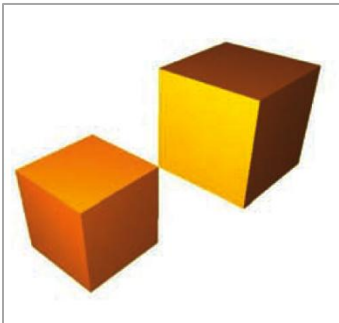
é o bordo de um sólido *não degenerado*.
A superfície separa *o interior e o exterior* do sólido.

Definição de Superfície:

Uma superfície é uma *variedade de dimensão 2, contínua e orientável* imersa em \mathbb{R}^3 .

Intuição ...

é o bordo de um sólido *não degenerado*.
A superfície separa o *interior* e o *exterior* do sólido.



Representação de Superfícies

Uma Superfície pode ser escrita na forma *Paramétrica* ou *Implícita*.

Superfície Paramétrica

Definição
Matemática

Uma *Superfície Paramétrica* é definida por uma função vetorial:

$$f : \Omega \rightarrow S$$

que mapeia o domínio de parâmetros $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ à superfície $S = f(\Omega) \subset \mathbb{R}^3$.

Superfície Paramétrica

Exemplos de
Cálculo 3

1) Cilindro,
coordenadas cilíndricas

$$f(\phi, z) = (\cos(\phi), \sin(\phi), z)$$

$$\phi \in [0, 2\pi]$$

$$z \in [-1, 1]$$

$$\rho = 1$$

Superfície Paramétrica

Exemplos de Cálculo 3

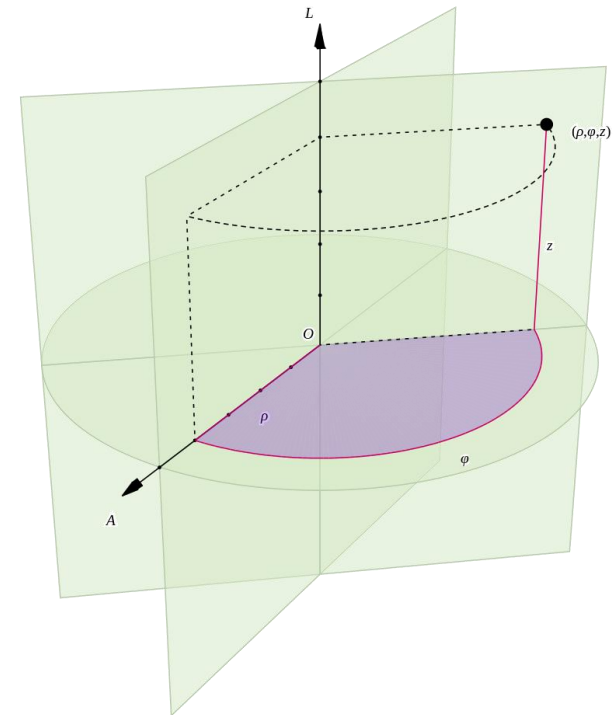
1) Cilindro, coordenadas cilíndricas

$$f(\phi, z) = (\cos(\phi), \sin(\phi), z)$$

$$\phi \in [0, 2\pi]$$

$$z \in [-1, 1]$$

$$\rho = 1$$



Superfície Paramétrica

Exemplos de
Cálculo 3

2) Esfera,
coordenadas esféricas

$$f(\theta, \phi) = (\cos(\theta) \sin(\phi), \sin(\theta) \sin(\phi), \cos(\phi))$$

$$\theta \in [0, 2\pi]$$

$$\phi \in [0, \pi]$$

$$r = 1$$

Superfície Paramétrica

Exemplos de
Cálculo 3

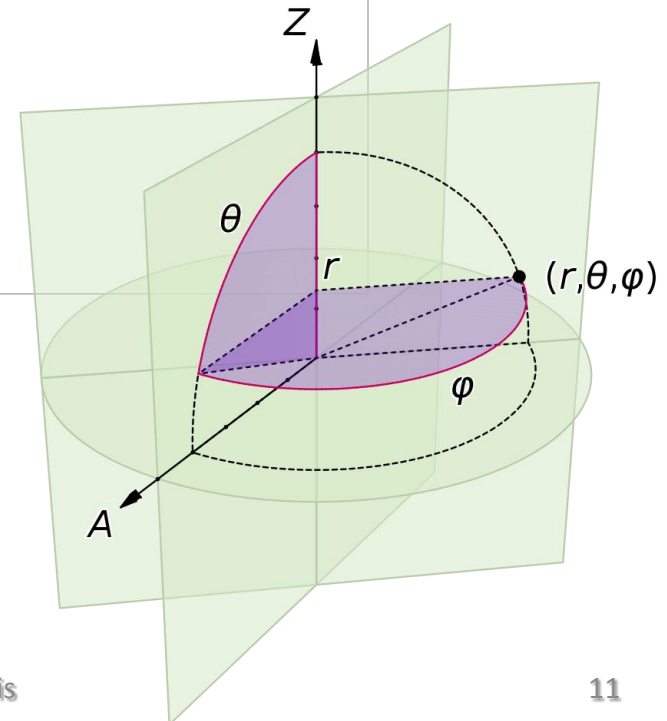
2) Esfera,
coordenadas esféricas

$$f(\theta, \phi) = (\cos(\theta) \sin(\phi), \sin(\theta) \sin(\phi), \cos(\phi))$$

$$\theta \in [0, 2\pi]$$

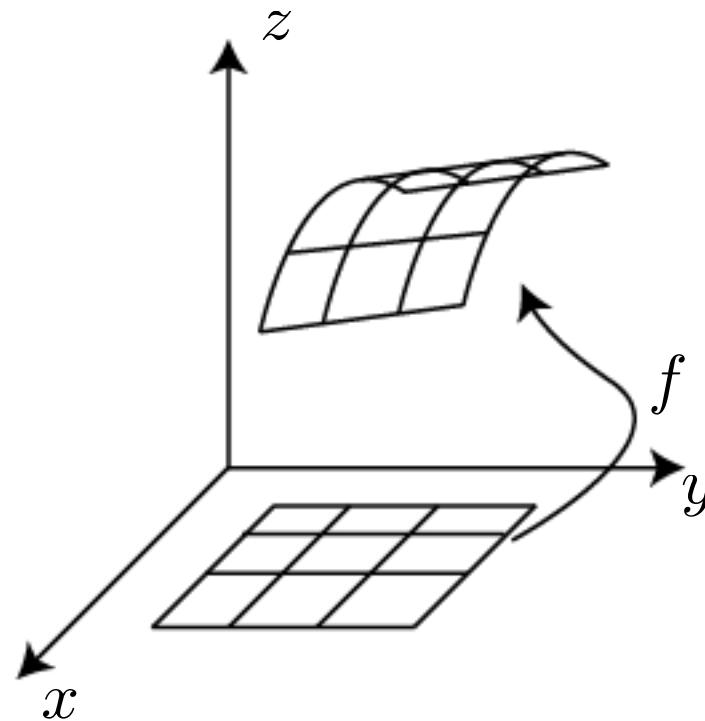
$$\phi \in [0, \pi]$$

$$r = 1$$



Superfície Paramétrica

Ilustração
da def.



Superfície Implícita

Definição
Matemática

Uma *Superfície Implícita* é definida como o conjunto de nível zero de uma função real:

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

ou seja, $S = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid F(\vec{x}) = 0 \} .$

Superfície Implícita

Exemplos de
Cálculo 3

1) Cilindro,
coordenadas cartesianas

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - r^2$$

$$z \in \mathbb{R}$$

$$S = \{ \vec{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(\vec{x}) = 0 \}$$

Superfície Implícita

Exemplos de
Cálculo 3

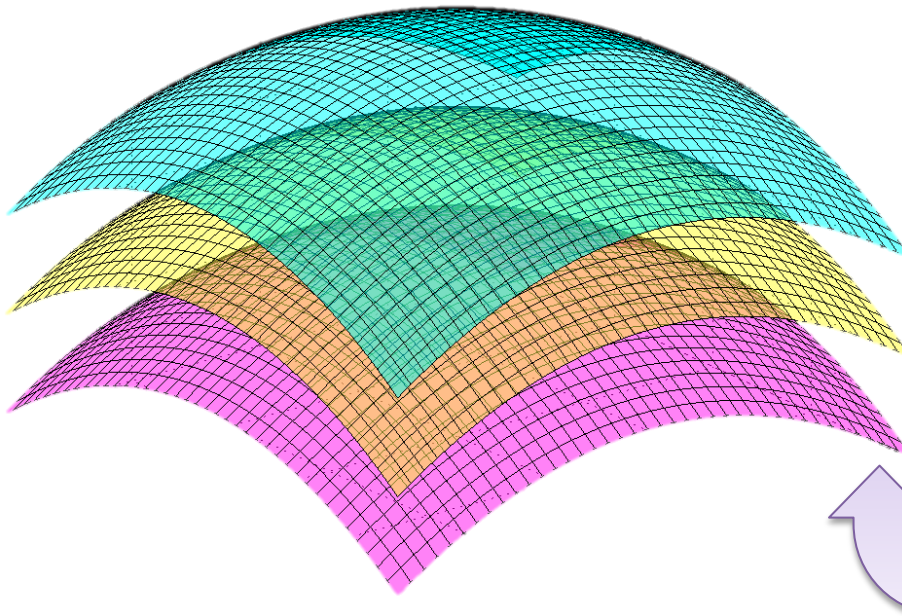
2) Esfera,
coordenadas cartesianas

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2$$

$$S = \{ \vec{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(\vec{x}) = 0 \}$$

Superfície Implícita

Ilustração da
def.



$$S = \{ \vec{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(\vec{x}) = 0 \}$$

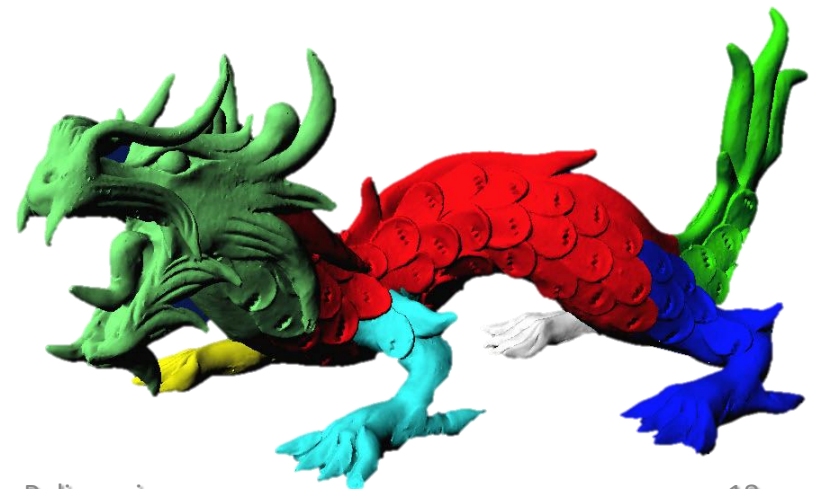
E se a superfície for muito **complexa** ?

**Observação
Importante**



E se a superfície for muito **complexa** ?

Definição
usando retalhos



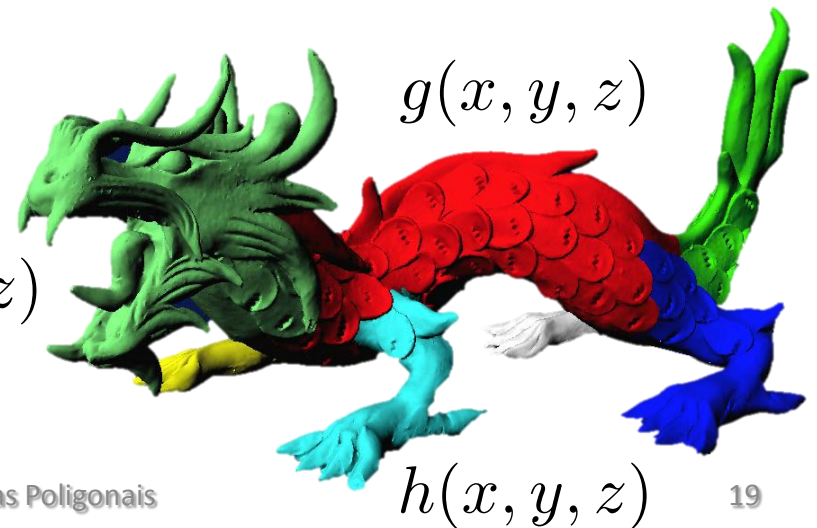
E se a superfície for muito **complexa** ?

Descrição
Local



$w(x, y, z)$

$f(x, y, z)$

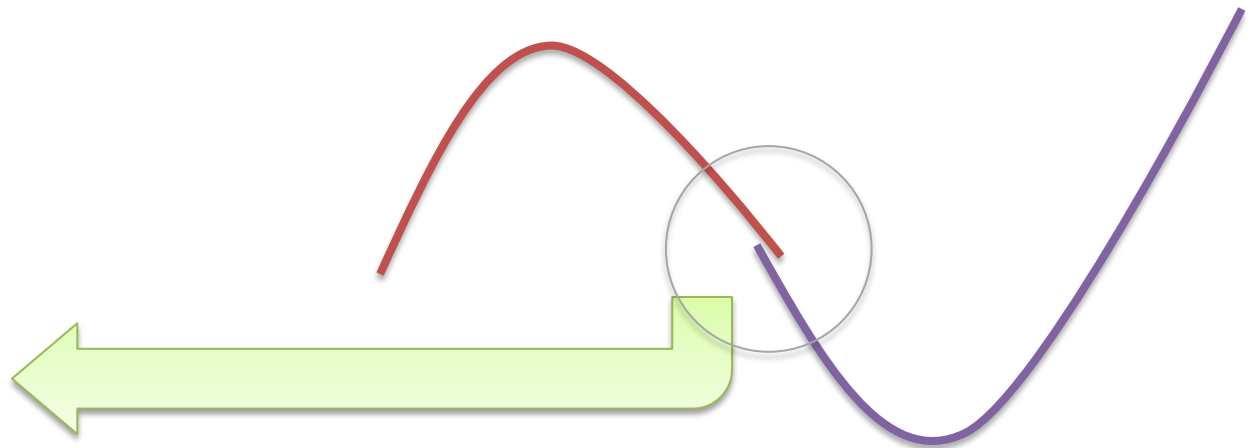
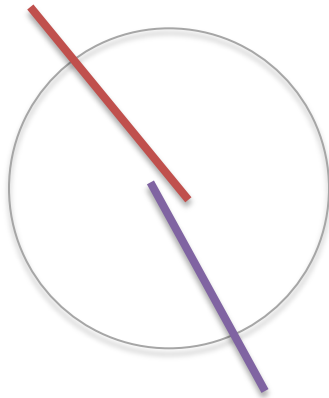


$g(x, y, z)$

$h(x, y, z)$

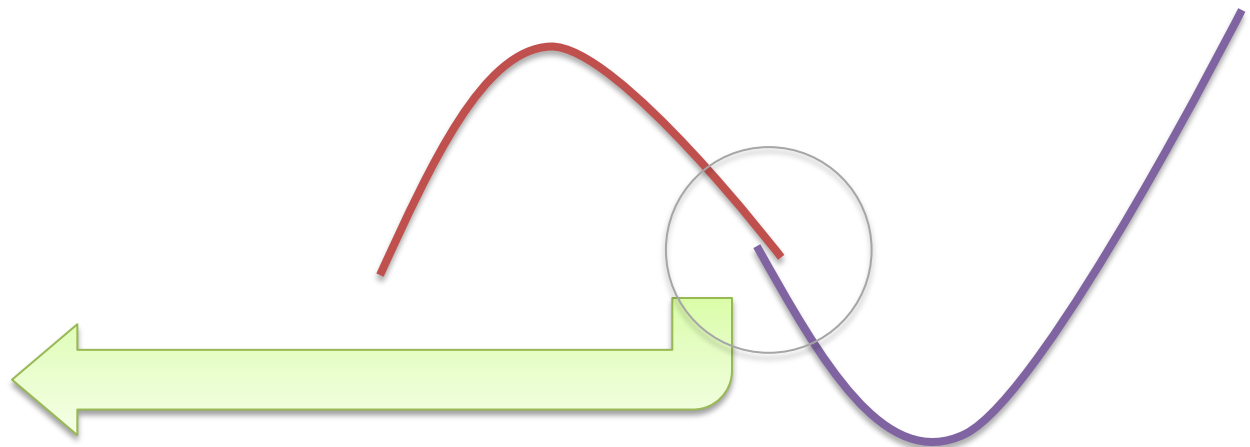
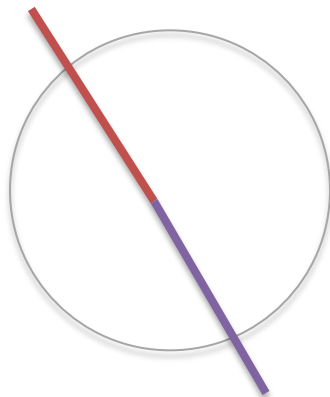
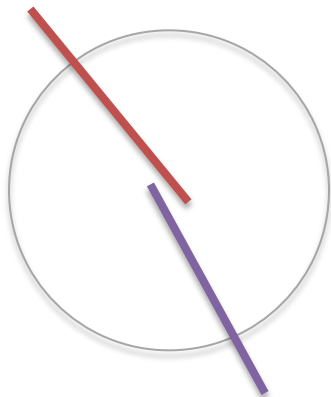
Definição por Partes (Retalhos)

Desafios
Matemáticos



Definição por Partes (Retalhos)

Desafios
Matemáticos



Transição consistente

Representação de Superfícies:

Definições Matemáticas
Propriedades das Representações

Representação de Superfícies

Propriedades das representações

Continuidade e
Vizinhança

Na maioria das aplicações,
as **informações sobre a superfície** são obtidas a partir de **amostragens discretas**.

Propriedades das representações

Continuidade e
Vizinhança

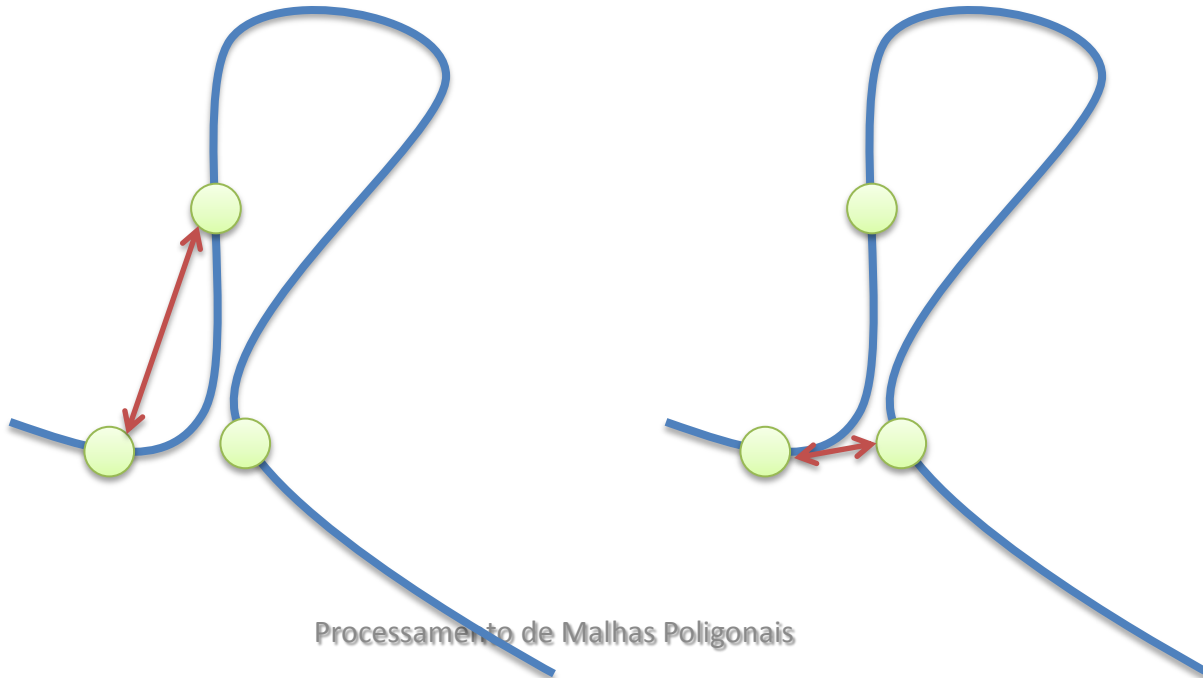
Na maioria das aplicações,
as **informações sobre a superfície** são obtidas a partir de **amostragens discretas**.

Primeiro passo para a representação da superfície: estabelecer **continuidade**

Propriedades das representações

Continuidade e
Vizinhança

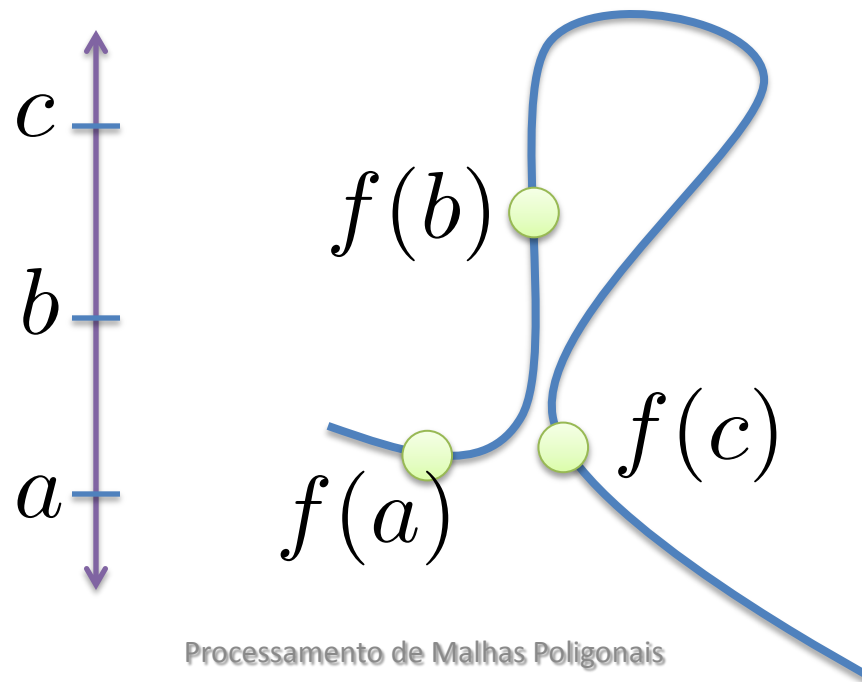
Construção de uma **relação de vizinhança consistente** entre as amostras.
Vizinhança Geodésica ...



Propriedades das representações

Continuidade e
Vizinhança

Construção de uma **relação de vizinhança consistente** entre as amostras.
Vizinhança Geodésica ... Simples quando usamos parametrizações!



Representação de Superfícies

Propriedades das representações

Descrição Local
de Variedade

Com a noção de vizinhança geodésica, podemos descrever variedades **localmente**:

Propriedades das representações

Descrição Local de Variedade

Com a noção de vizinhança geodésica, podemos descrever variedades **localmente**:

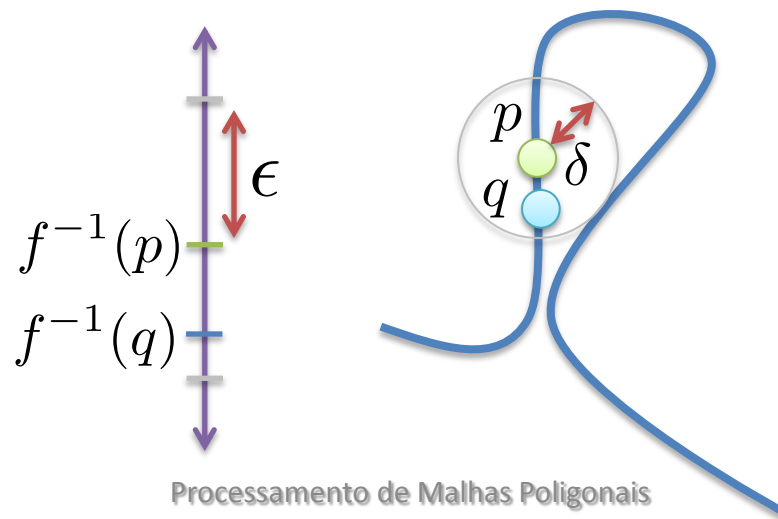
1) Uma superfície paramétrica contínua é uma **variedade local** em um ponto p da superfície se para qualquer ponto q em uma esfera suficientemente pequena de tamanho δ em torno de p , sua pré-imagem estiver contida num círculo de raio ϵ em torno da pré-imagem de p .

Propriedades das representações

Descrição Local de Variedade

Com a noção de vizinhança geodésica, podemos descrever variedades **localmente**:

1) Uma superfície paramétrica contínua é uma **variedade local** em um ponto p da superfície se para qualquer ponto q em uma esfera suficientemente pequena de tamanho δ em torno de p , sua pré-imagem estiver contida num círculo de raio ϵ em torno da pré-imagem de p .



Propriedades das representações

Descrição Local
de Variedade

Com a noção de vizinhança geodésica, podemos descrever variedades **localmente**:

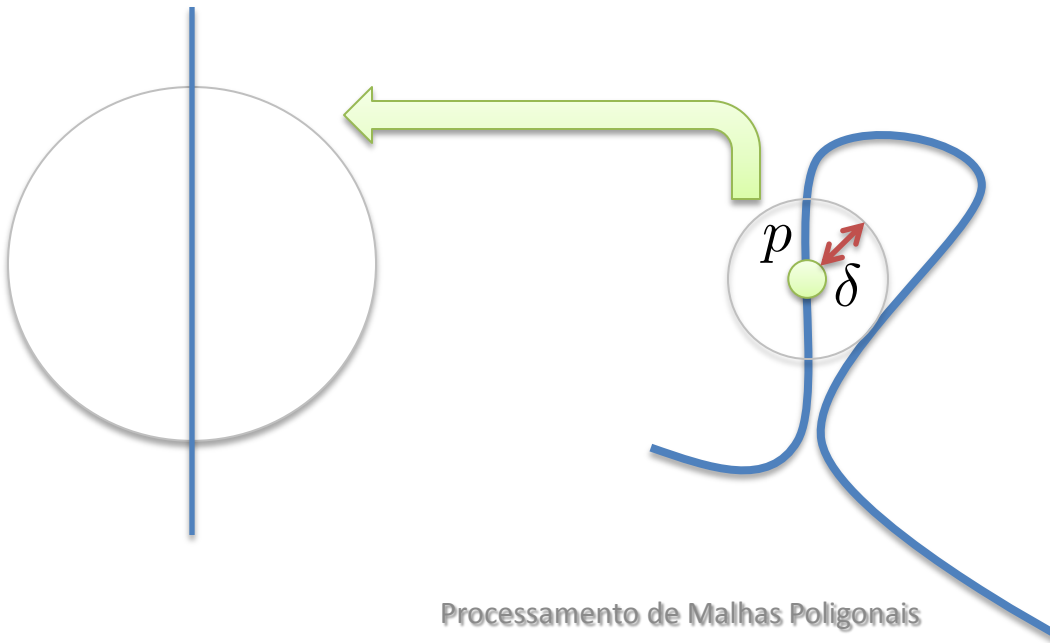
2) O retalho de superfície que cabe em uma esfera de raio δ suficientemente pequeno em torno do ponto p é **topologicamente equivalente** a um disco.

Propriedades das representações

Descrição Local de Variedade

Com a noção de vizinhança geodésica, podemos descrever variedades **localmente**:

2) O retalho de superfície que cabe em uma esfera de raio δ suficientemente pequeno em torno do ponto p é **topologicamente equivalente** a um disco.



Representação de Superfícies

Propriedades das representações

Suavidade

A menos de um conjunto bem definido de “**sharp features**”, desejamos trabalhar com superfícies suaves.

Propriedades das representações

Suavidade

A menos de um conjunto bem definido de “**sharp features**”, desejamos trabalhar com superfícies suaves.

Matematicamente, a suavidade da superfície é medida pelo número k de derivadas contínuas de sua representação implícita ou paramétrica.

Propriedades das representações

Suavidade

A menos de um conjunto bem definido de “**sharp features**”, desejamos trabalhar com superfícies suaves.

Matematicamente, a suavidade da superfície é medida pelo número k de derivadas contínuas de sua representação implícita ou paramétrica.

Dizemos que a superfície tem suavidade de ordem C^k .

Propriedades das representações

Interpolação e
Aproximação

A **modelagem matemática exata** de um objeto real é intratável.

Propriedades das representações

Interpolação e
Aproximação

A **modelagem matemática exata** de um objeto real é intratável.

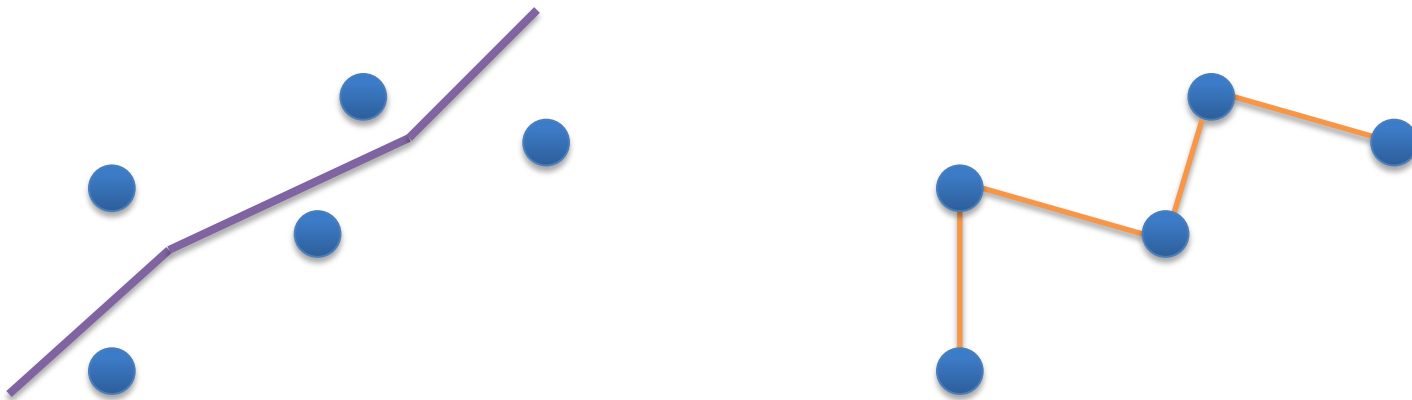
Ao gerarmos superfícies contínuas a partir de um conjunto de amostras, podemos adotar duas estratégias: **Aproximação** ou **Interpolação**.

Propriedades das representações

Interpolação e
Aproximação

A **modelagem matemática exata** de um objeto real é intratável.

Ao gerarmos superfícies contínuas a partir de um conjunto de amostras, podemos adotar duas estratégias: **Aproximação** ou **Interpolação**.



Propriedades das representações

Interpolação e
Aproximação

A **modelagem matemática exata** de um objeto real é intratável.

Ao gerarmos superfícies contínuas a partir de um conjunto de amostras, podemos adotar duas estratégias: **Aproximação** ou **Interpolação**.

Na prática, as amostras são obtidas por dispositivos de medição e, apresentam **ruídos**, o que torna os métodos de **aproximação** mais adequados.

Aproximação

Polinômios

Para uma representação de superfície que viabilize **processamento eficiente**, a escolha natural é trabalhar com **polinômios**.



Baseados em **operações aritméticas elementares**.

Aproximação

Polinômios

Para uma representação de superfície que viabilize **processamento eficiente**, a escolha natural é trabalhar com **polinômios**.

Pelo **teorema de Weierstrass** sabemos que para cada função f existe um polinômio que aproxima f qualquer que seja a precisão desejada.

Aproximação

Discretização

Pelo **teorema de Taylor**, sabemos que uma função pode ser aproximada em um intervalo $[a,b]$ por:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + O(|b - a|^{n+1})$$

Aproximação

Discretização

Pelo **teorema de Taylor**, sabemos que uma função pode ser aproximada em um intervalo $[a,b]$ por:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + O\left(\frac{|b - a|^{n+1}}{h}\right)$$

Aproximação

Discretização

Pelo **teorema de Taylor**, sabemos que uma função pode ser aproximada em um intervalo $[a,b]$ por:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k}_{p(x)} + \underbrace{O(|b - a|^{n+1})}_h$$

Aproximação

Discretização

Pelo **teorema de Taylor**, sabemos que uma função pode ser aproximada em um intervalo $[a,b]$ por:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k}_{p(x)} + \underbrace{O(|b - a|^{n+1})}_h$$

Para **melhorar a aproximação**:

Aumentar o **grau do polinômio** (refinamento p)
Diminuir o tamanho do **intervalo** (refinamento h)

Aproximação

Discretização

Normalmente o refinamento h é preferido:

Para polinômios de grau alto, definidos por partes, é difícil garantir suavidade C^k .

Aproximação

Discretização

Normalmente o **refinamento h** é preferido:

Para polinômios de grau alto, definidos por partes, é difícil garantir suavidade C^k .

Nas **arquitecturas dos computadores atuais**, processar um grande número de operações simples é mais eficiente que executar um número menor de instruções complexas.

Aproximação

Discretização

Normalmente o **refinamento h** é preferido:

Para polinômios de grau alto, definidos por partes, é difícil garantir suavidade C^k .

Nas **arquitecturas dos computadores atuais**, processar um grande número de operações simples é mais eficiente que executar um número menor de instruções complexas.

Estes argumentos justificam a escolha de aproximações por partes de ordem C^0 também conhecidas como **malhas de polígonos**.

Representação de Superfícies:

Definições Matemáticas
Propriedades das Representações
Descrição Implícita Vs Descrição Paramétrica

Implícito Vs Paramétrico

Escolha do
modelo

A escolha do **modelo de representação** depende da **aplicação** e das **operações** que pretendemos realizar.

Implícito Vs Paramétrico

Escolha do
modelo

A escolha do **modelo de representação** depende da **aplicação** e das **operações** que pretendemos realizar.

Ou seja,
a escolha da representação **viabiliza ou inviabiliza** implementações eficientes.

Implícito Vs Paramétrico

Prós e
Contras

As representações paramétrica e implícita tem **características complementares.**

Implícito Vs Paramétrico

Prós e
Contras

As representações paramétrica e implícita tem **características complementares**.

Veremos ao longo do curso que, quando há **eficiência e robustez** de uma delas em relação a um tipo de operação geométrica, temos **ineficiência e fragilidade** da outra.

Implícito Vs Paramétrico

Prós e
Contras

As representações paramétrica e implícita tem **características complementares**.

Veremos ao longo do curso que, quando há **eficiência e robustez** de uma delas em relação a um tipo de operação geométrica, temos **ineficiência e fragilidade** da outra.

Como agir?

Implícito Vs Paramétrico

Prós e
Contras

Para analisar a melhor representação para uma determinada operação, podemos **classificar as operações** em categorias:

Implícito Vs Paramétrico

Prós e
Contras

Para analisar a melhor representação para uma determinada operação, podemos **classificar as operações** em categorias:

Op. de Estimativa – São as operações de amostragem da geometria ou de qualquer outro atributo da superfície, como por exemplo suas normais.

Implícito Vs Paramétrico

Prós e
Contras

Para analisar a melhor representação para uma determinada operação, podemos **classificar as operações** em categorias:

Op. de Estimativa – São as operações de amostragem da geometria ou de qualquer outro atributo da superfície, como por exemplo suas normais.

Op. de Investigação – Usadas para determinar quando um ponto p está dentro ou fora de um sólido determinado por uma superfície S , bem como a distancia entre p e S .

Implícito Vs Paramétrico

Prós e
Contras

Para analisar a melhor representação para uma determinada operação, podemos **classificar as operações** em categorias:

Op. de Estimativa – São as operações de amostragem da geometria ou de qualquer outro atributo da superfície, como por exemplo suas normais.

Op. de Investigação – Usadas para determinar quando um ponto p está dentro ou fora de um sólido determinado por uma superfície S , bem como a distancia entre p e S .

Op. de Modificação – Usadas para alterar a superfície em termos geométricos ou topológicos (estudaremos mais a diante).

Representações Paramétricas

Possibilita a **redução de problemas 3D** sobre a superfície para problemas 2D sobre o domínio de parâmetros.

Representações Paramétricas

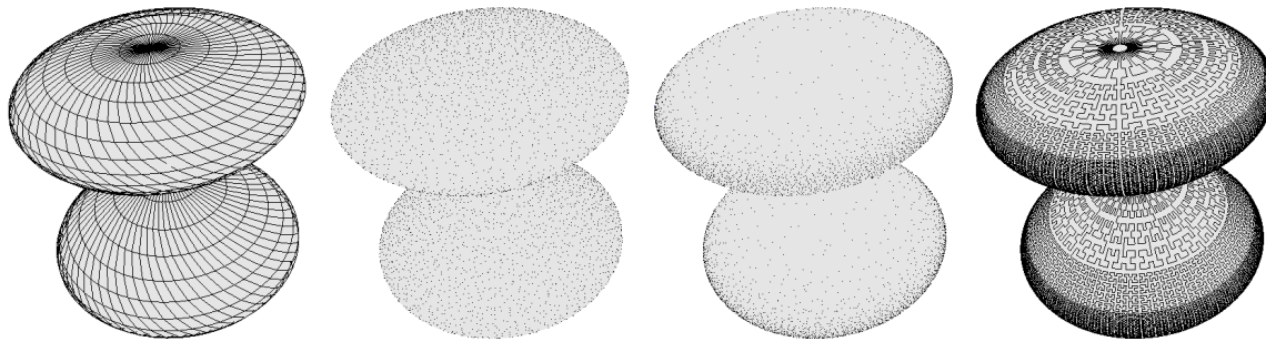
Possibilita a **redução de problemas 3D** sobre a superfície para problemas 2D sobre o domínio de parâmetros.

Ex.: Amostragem de pontos sobre a superfície podem facilmente ser geradas amostrando o domínio de parâmetros e avaliando a parametrização.

Representações Paramétricas

Possibilita a **redução de problemas 3D** sobre a superfície para problemas 2D sobre o domínio de parâmetros.

Ex.: Amostragem de pontos sobre a superfície podem facilmente ser geradas amostrando o domínio de parâmetros e avaliando a parametrização.



Representações Paramétricas

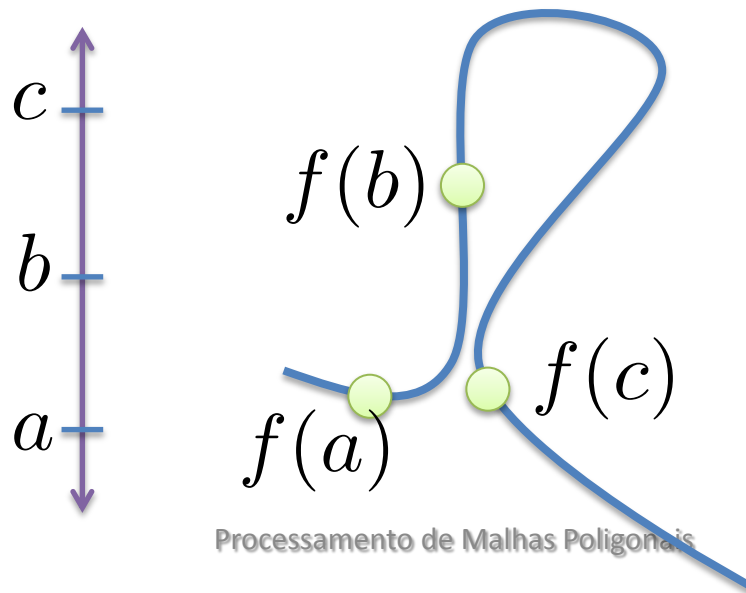
Possibilita a **redução de problemas 3D** sobre a superfície para problemas 2D sobre o domínio de parâmetros.

Ex.: Vizinhança Geodésica.

Representações Paramétricas

Possibilita a **redução de problemas 3D** sobre a superfície para problemas 2D sobre o domínio de parâmetros.

Ex.: Vizinhança Geodésica.



Representações Paramétricas

Fácil de compor com uma função **deformação**:

$$d : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Representações Paramétricas

Fácil de compor com uma função **deformação**:

$$d : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Basta compormos a deformação com a parametrização:

$$d \circ f : \Omega \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Representações Paramétricas

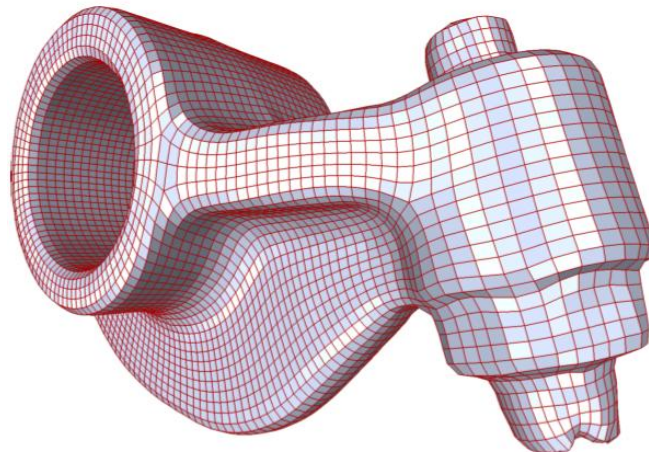
Difícil de construir a parametrização de uma superfície complexa ...

A parametrização tem que se **adaptar às estruturas métricas e topológicas** da superfície.

Representações Paramétricas

Difícil de construir a parametrização de uma superfície complexa ...

A parametrização tem que se **adaptar às estruturas métricas e topológicas** da superfície.



Representações Paramétricas

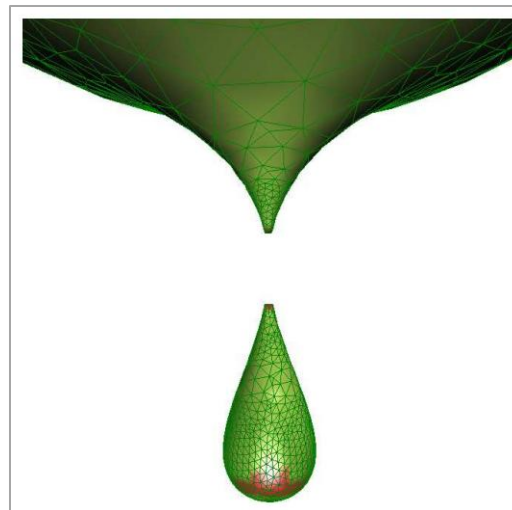
Difícil de representar **mudanças topológicas** através de deformações ...

A parametrização e o domínio dos parâmetros precisam ser ajustados

Representações Paramétricas

Difícil de representar **mudanças topológicas** através de deformações ...

A parametrização e o domínio dos parâmetros precisam ser ajustados



Representação de Superfícies

Representações Paramétricas

Exemplo:
NURBS

Padrão em sistemas **CAD**.

Representações Paramétricas

Exemplo:
NURBS

Padrão em sistemas CAD.

Construídas a partir de bases de polinômios:

$$f : [u_n, u_m] \times [v_n, v_k] \rightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(u, v) \mapsto \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^k c_{ij} N_i^n(u) N_j^n(v)$$

Representações Paramétricas

Exemplo:
NURBS

Padrão em sistemas CAD.

Construídas a partir de bases de polinômios:

$$f : [u_n, u_m] \times [v_n, v_k] \rightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(u, v) \mapsto \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^k c_{ij} N_i^n(u) N_j^n(v)$$

$N_i^n(\cdot)$ são **polinômios definidos por partes** e formam uma **base** para o espaço das funções polinomiais.

Representações Paramétricas

Exemplo:
NURBS

Padrão em sistemas CAD.

Construídas a partir de bases de polinômios:

$$f : [u_n, u_m] \times [v_n, v_k] \rightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(u, v) \mapsto \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^k c_{ij} N_i^n(u) N_j^n(v)$$

c_{ij} são os **pontos de controle** da superfície. Os pontos de controle tem raio de ação local.

Representações Paramétricas

Exemplo:
NURBS

Padrão em sistemas CAD.

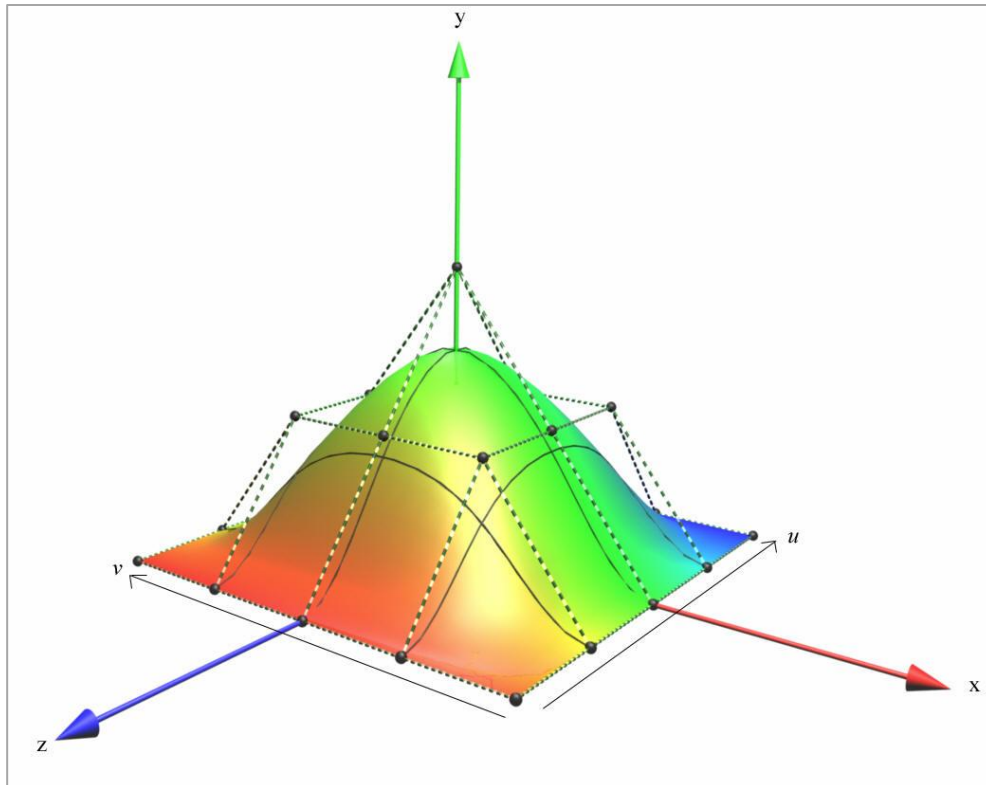
Construídas a partir de bases de polinômios:

$$f : [u_n, u_m] \times [v_n, v_k] \rightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(u, v) \mapsto \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^k c_{ij} N_i^n(u) N_j^n(v)$$

c_{ij} são os **pontos de controle** da superfície. Como $N_i^n(\cdot) \geq 0$ e $\sum_i N_i^n \equiv 1$,
cada ponto $f(u, v)$ da superfície está no fecho convexo dos pontos de controle.

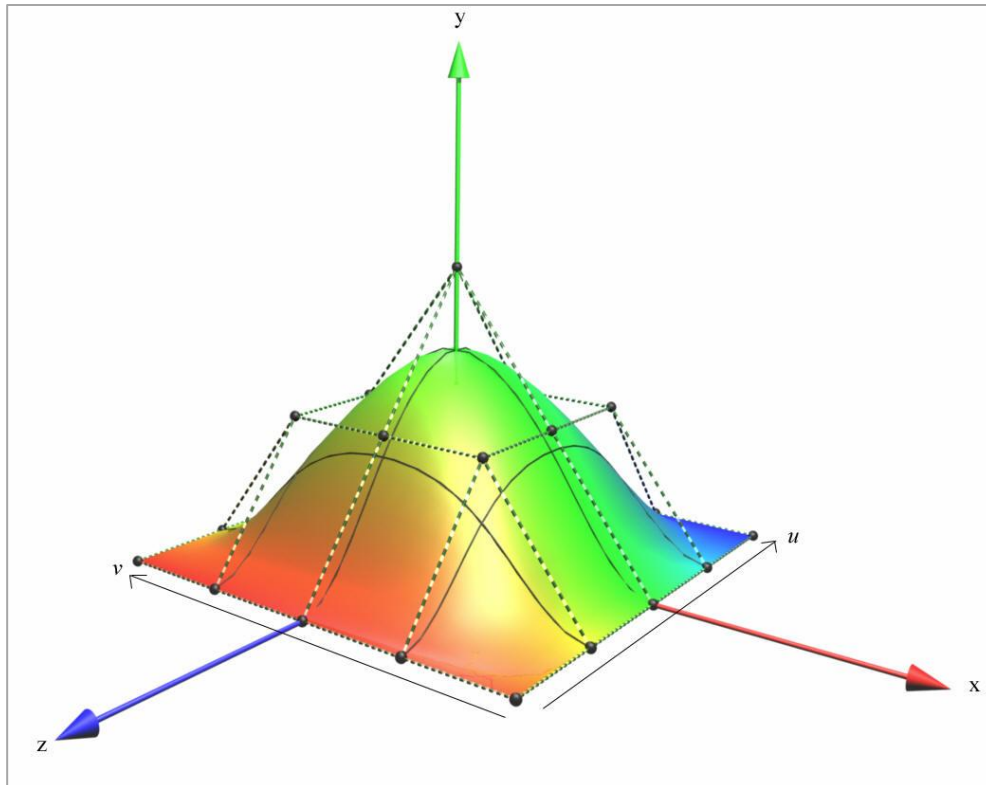
Representações Paramétricas

Exemplo:
NURBS



Representações Paramétricas

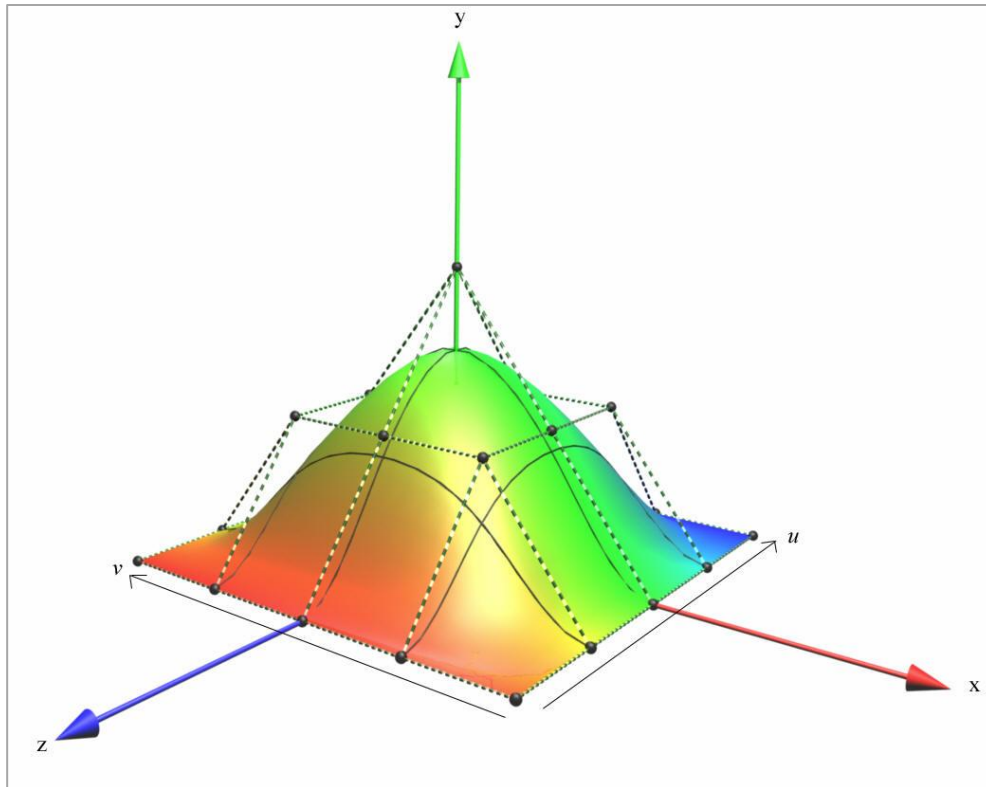
Exemplo:
NURBS



Restrições **topológicas e geométricas.**

Representações Paramétricas

Exemplo:
NURBS



Restrições **topológicas e geométricas.**

Refinamento é
ineficiente.

Representação de Superfícies

Representações Paramétricas

Exemplo:
Malhas de
Triângulos

Usualmente são vistas como uma **coleção de triângulos sem estrutura matemática particular**.

Representações Paramétricas

Exemplo:
Malhas de
Triângulos

Usualmente são vistas como uma **coleção de triângulos sem estrutura matemática particular**.

Podemos definir, uma parametrização para cada triângulo: **Parametrização Baricêntrica**.

Representações Paramétricas

Exemplo:
Malhas de
Triângulos

Usualmente são vistas como uma **coleção de triângulos sem estrutura matemática particular**.

Podemos definir, uma parametrização para cada triângulo: **Parametrização Baricêntrica**.



Obtemos uma representação paramétrica **linear por partes** da superfície !!!

Representações Paramétricas

Exemplo:
Malhas de
Triângulos

Cada ponto p no interior de um triângulo de vértices $[a,b,c]$ pode ser escrito de **maneira única** como a combinação baricêntrica dos vértices:

$$p = \alpha a + \beta b + \gamma c$$

Representações Paramétricas

Exemplo:
Malhas de
Triângulos

Cada ponto p no interior de um triângulo de vértices $[a,b,c]$ pode ser escrito de **maneira única** como a combinação baricêntrica dos vértices:

$$p = \alpha a + \beta b + \gamma c$$

Onde: $\alpha + \beta + \gamma = 1$ e $\alpha, \beta, \gamma > 0$.

Representações Paramétricas

Exemplo:
Malhas de
Triângulos

Em breve investigaremos mais
sobre malhas de triângulos e polígonos.



Representações Implícitas

Facilita a **classificação de pontos** do espaço ambiente em relação à superfície.

Representações Implícitas

Facilita a **classificação de pontos** do espaço ambiente em relação à superfície.



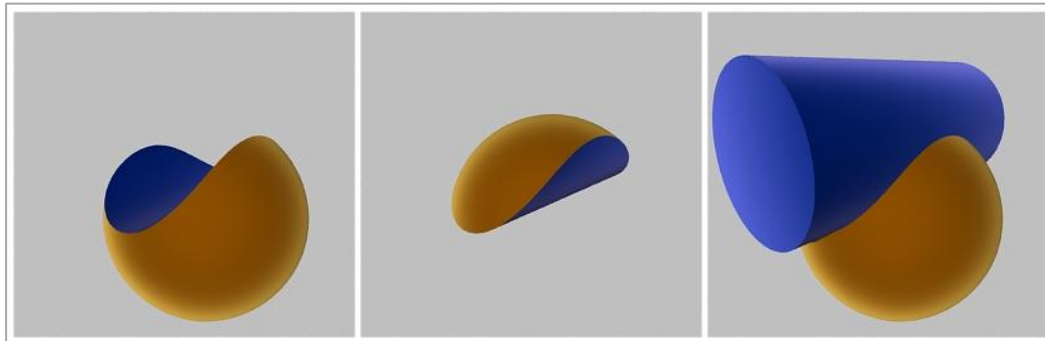
Simple de realizar **operações booleanas** entre superfícies.

Representações Implícitas

Facilita a **classificação de pontos** do espaço ambiente em relação à superfície.



Simple de realizar **operações booleanas** entre superfícies.

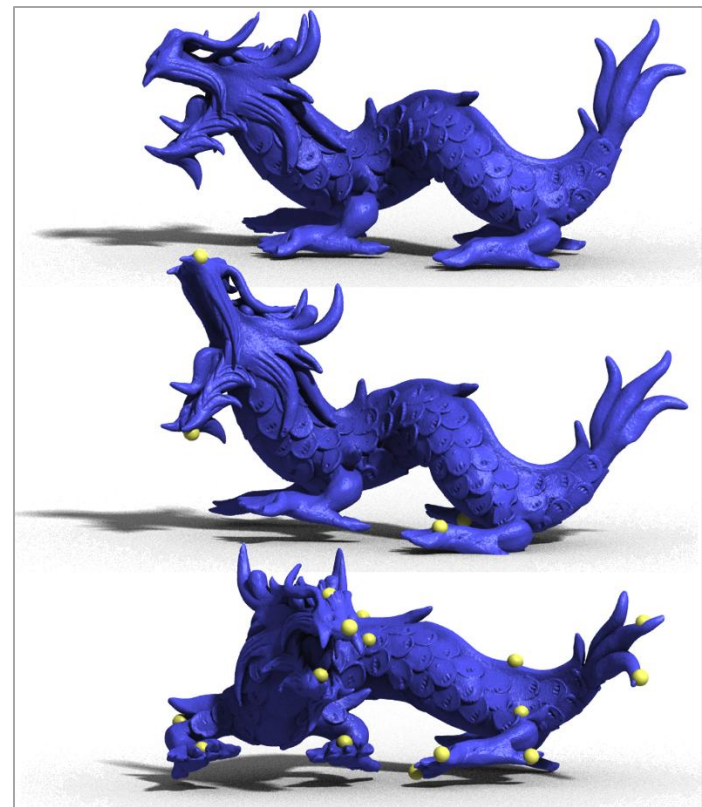


Representações Implícitas

Facilita a **deformação** da superfície,
através da alteração local dos valores
da função.

Representações Implícitas

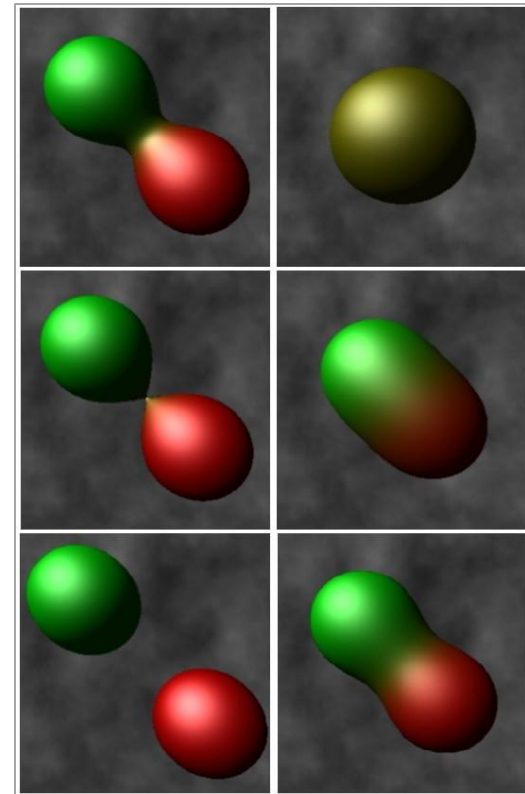
Facilita a **deformação** da superfície, através da alteração local dos valores da função.



Representações Implícitas

Facilita a **deformação** da superfície, através da alteração local dos valores da função.

A **topologia** da superfície de nível pode sofrer alterações facilmente.



Representações Implícitas



Difícil de amostrar uma superfície implícita.

Representações Implícitas



Difícil de amostrar uma superfície implícita.

Difícil de encontrar a **vizinhança geodésica**.

Representações Implícitas



Difícil de amostrar uma superfície implícita.

Difícil de encontrar a **vizinhança geodésica**.

Não fornece estrutura paramétrica alguma: Problemas para aplicar **texturas**.

Representações Implícitas



Difícil de amostrar uma superfície implícita.

Difícil de encontrar a vizinhança geodésica.

Não fornece estrutura paramétrica alguma: Problemas para aplicar texturas.

O render é mais complexo ...

Representações Implícitas

Exemplo:
Grids Regulares

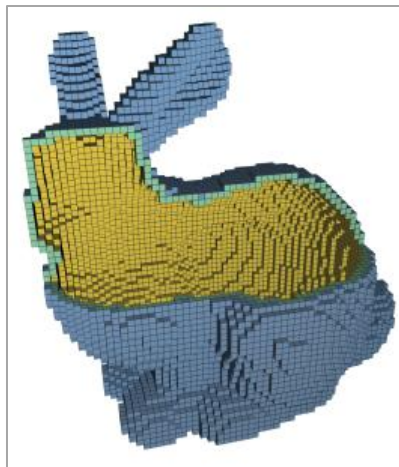
Para representar o campo escalar F , podemos discretizar sua bounding box usando um **grid regular** com nós $g_{ijk} \in \mathbb{R}^3$.

Representações Implícitas

Exemplo:
Grids Regulares

Para representar o campo escalar F , podemos discretizar sua bounding box usando um **grid regular** com nós $g_{ijk} \in \mathbb{R}^3$.

Função **implicitamente representada** por $F_{ijk} := F(g_{ijk})$.



Representações Implícitas

Exemplo:
Grids Regulares

Para representar o campo escalar F , podemos discretizar sua bounding box usando um **grid regular** com nós $g_{ijk} \in \mathbb{R}^3$.

Função **implicitamente representada** por $F_{ijk} := F(g_{ijk})$.

Valores no interior das células dos grids podem ser obtidos a partir de interpolação.

Representações Implícitas

Exemplo:
Grids Regulares

Para representar o campo escalar F , podemos discretizar sua bounding box usando um **grid regular** com nós $g_{ijk} \in \mathbb{R}^3$.

Função **implicitamente representada** por $F_{ijk} := F(g_{ijk})$.

Valores no interior das células dos grids podem ser obtidos a partir de interpolação.

 **Aproximação Cúbica** 

Representações Implícitas

Exemplo:
Estruturas
Adaptativas

Em computação gráfica é comum adotarmos **amostragens não uniformes** em prol de eficiência e memória.

Representações Implícitas

Exemplo:
Estruturas
Adaptativas

Em computação gráfica é comum adotarmos **amostragens não uniformes** em prol de eficiência e memória.

Podemos amostrar o campo escalar F , levando em conta seu **significado geométrico**.

Representações Implícitas

Exemplo:
Estruturas
Adaptativas

Em computação gráfica é comum adotarmos **amostragens não uniformes** em prol de eficiência e memória.

Podemos amostrar o campo escalar F , levando em conta seu **significado geométrico**.

Como usualmente estamos interessado na superfície de nível zero, podemos usar uma densidade de amostras maior em sua vizinhança.

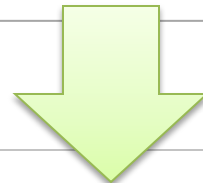
Representações Implícitas

Exemplo:
Estruturas
Adaptativas

Em computação gráfica é comum adotarmos **amostragens não uniformes** em prol de eficiência e memória.

Podemos amostrar o campo escalar F , levando em conta seu **significado geométrico**.

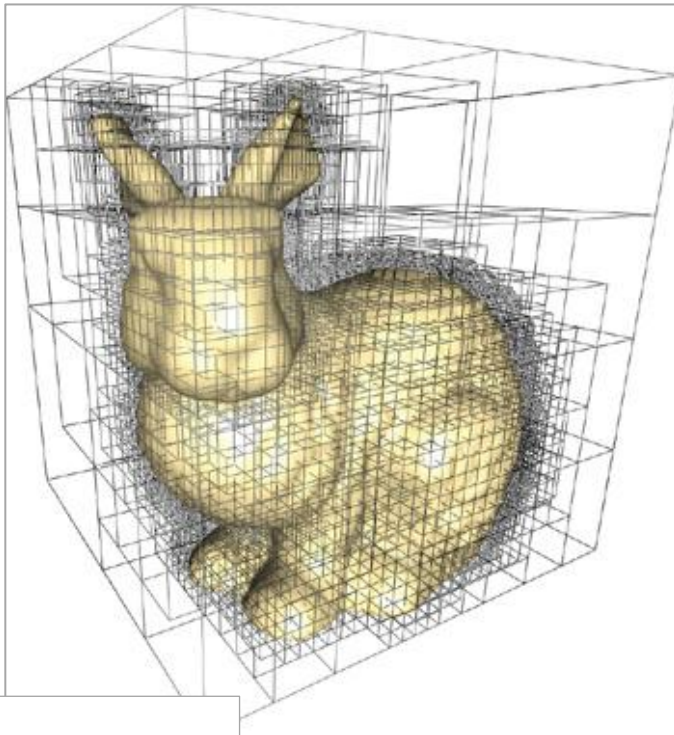
Como usualmente estamos interessados na superfície de nível zero, podemos usar uma densidade de amostras maior em sua vizinhança.



Estruturas Hierárquicas

Representações Implícitas

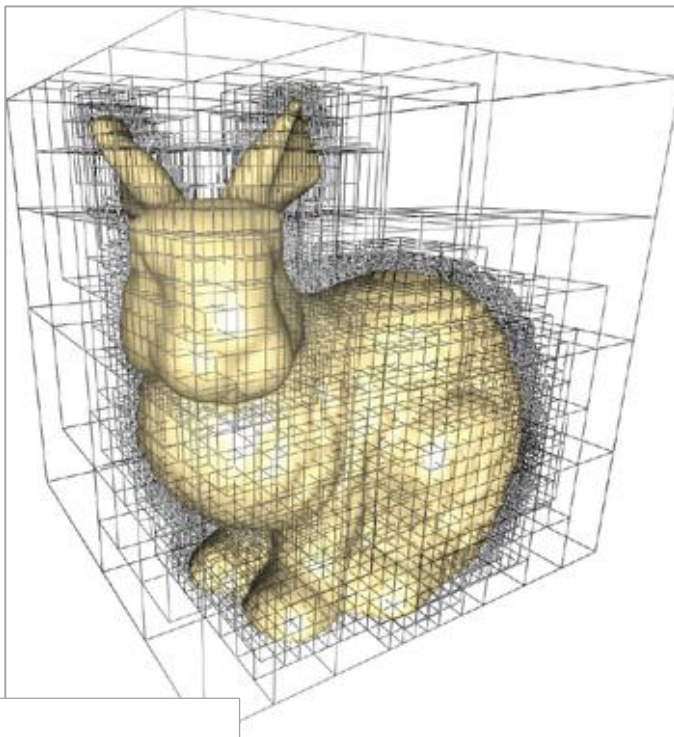
Exemplo:
Estruturas
Adaptativas



Octree

Representações Implícitas

Exemplo:
Estruturas
Adaptativas



Octree

Bsp

Kd-Tree

...

Exemplo:
Estruturas
Adaptativas

Representações Implícitas

Reconstrução implícita de nuvens de pontos usando estruturas adaptativas.

Multi-level Partition of Unity Implicits

Yusaku Ohtake MPI Saarbrücken	Alexander Beyesov MPI Saarbrücken	Maxi Alexa TU Darmstadt	Greg Turk Georgia Tech	Hans-Peter Seidel MPI Saarbrücken
----------------------------------	--------------------------------------	----------------------------	---------------------------	--------------------------------------

Abstract

We present a shape representation, the multi-level partition of unity implicit surface, that allows us to construct surface models from very large sets of points. There are three key ingredients to our approach: 1) piecewise quadratic functions that capture the local shape of the surface, 2) weighting functions (the partitions of unity) that blend together these local shape functions, and 3) an octree subdivision method that adapts to variations in the complexity of the local shape.

Our approach gives us considerable flexibility in the choice of local shape functions, and in particular we can accurately represent sharp features such as edges and corners by selecting appropriate shape functions. An error-controlled subdivision leads to an adaptive approximation whose time and memory consumption depends on the required accuracy. Due to the separation of local approximation and local blending, the representation is not global and can be created and evaluated rapidly. Because our surfaces are described using implicit functions, operations such as shape blending, offsets, deformations and CSG are simple to perform.

CR Categories: I.3.4 [Computer Graphics]: Computational Geometry and Object Modeling—Curve, surface, solid, and object representations.

Keywords: partition of unity approximation, error-controlled subdivision, adaptive distance field approximation, implicit modeling.

1 Introduction

There are many applications that rely on building accurate models of real-world objects such as sculptures, damaged machine parts, archaeological artifacts, and terrain. Techniques for digitizing objects include laser ranging/depth, mechanical touch probes, and computer vision techniques such as depth from focus. Some of these techniques can yield millions of 3D point locations on the object that is being digitized. Once these points have been collected, it is a non-trivial task to build a surface representation that is faithful to the collected data. Some of the desirable properties of a surface reconstruction method include speed, low memory overhead, the creation of surfaces that approximate rather than interpolate the data (when noise or mis-registration is present), faithful reproduction of sharp features, and robustness in the presence of holes and low-sampling density.

In this paper we introduce a new class of implicit models that was specifically designed to meet these requirements for rapidly and accurately modeling surfaces from large collections of points. We use the name *Multi-level Partition of Unity Implicits (MPU)* because at the heart of our method is a set of weighting functions that sum to one at all points in the domain. Given a set of points $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_n\}$ sampled from a surface in \mathbb{R}^3 , an MPU implicit $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ provides an adaptive error-controlled approximation of the signed distance function from the surface. The approximation is accurate near the surface and rough far from the surface. The surface itself is then approximated by the zero level set of the distance function. We assume that the points of \mathcal{P} are equipped with unit normals $\mathbf{n}_i = \{n_{i1}, \dots, n_{i3}\}$ that indicate the surface orientation. In practice, these normals can be estimated either from initial scans



Figure 1: The Stanford Lucy, consisting of 14 million points, is reconstructed as an MPU implicit with a 10^{-4} max norm approximation accuracy; the left part of the model is colored according to the subdivision level which increases from blue to red. The four models in the back are reconstructed from the point set with increasing approximation error.

during the shape acquisition phase or by local least squares fitting to \mathcal{P} . We also consider the case when the surface is approximated by a mesh and \mathcal{P} is the set of mesh vertices. Then the normals \mathbf{n}_i are the mesh vertex normals.

To create our implicit representation, we start with a box that bounds the point set and create an octree-based subdivision of this box. At each cell of the octree, a piecewise quadratic function (like local shape functions) is created that fits the points in the cell. These shape functions act much like a signed distance function, and take on the value zero near the data points and become positive (inside) or negative (outside) away from the data points. The approximate normals of the points are used to distinguish this inside/outside orientation locally. If the shape function approximation is not accurate enough (doesn't match the points well), the cell is subdivided and the procedure is repeated until a certain accuracy is achieved. Fig-

Leitura Complementar:
Multilevel Partition of Unity Implicits
Y. Otake et al.
Siggraph
2003

Conversões de Modelo de Representação

Implícito para
Paramétrico

Marching Cubes:

Algoritmo publicado na ***Siggraph de 1987*** por ***Lorensen and Cline***, que viabiliza a **extração de superfícies poligonais** para aproximar isosuperfícies de um campo escalar.

Conversões de Modelo de Representação

Implícito para
Paramétrico

Marching Cubes:

Algoritmo publicado na ***Siggraph de 1987*** por ***Lorensen and Cline***, que viabiliza a **extração de superfícies poligonais** para aproximar isosuperfícies de um campo escalar.

$2^8 = 256$ casos possíveis de poligonização:

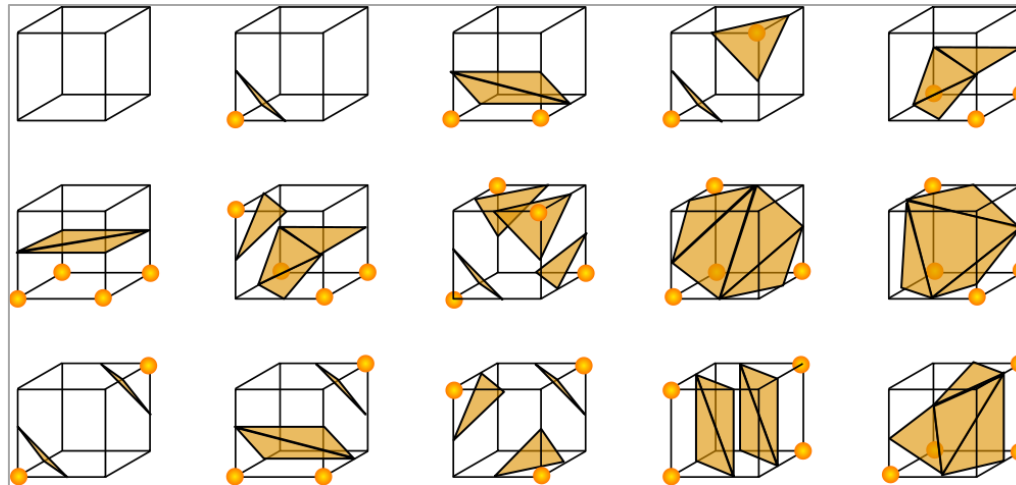
Conversões de Modelo de Representação

Implícito para
Paramétrico

Marching Cubes:

Algoritmo publicado na **Siggraph de 1987** por **Lorensen and Cline**, que viabiliza a **extração de superfícies poligonais** para aproximar isosuperfícies de um campo escalar.

$2^8 = 256$ casos possíveis de poligonização:



Conversões de Modelo de Representação

Implícito para
Paramétrico

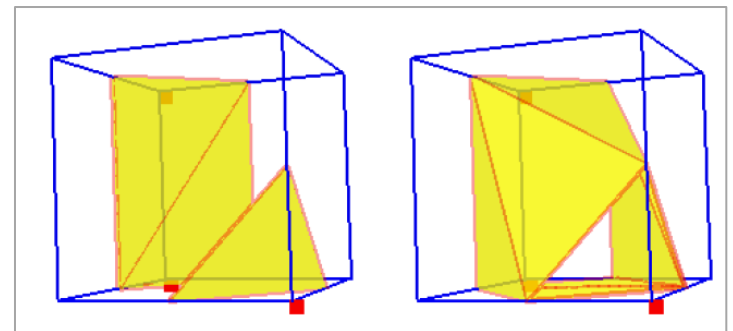
Marching Cubes:
No trabalho original existiam casos **ambíguos** ...

Conversões de Modelo de Representação

Implícito para
Paramétrico

Marching Cubes:
No trabalho original existiam casos **ambíguos** ...

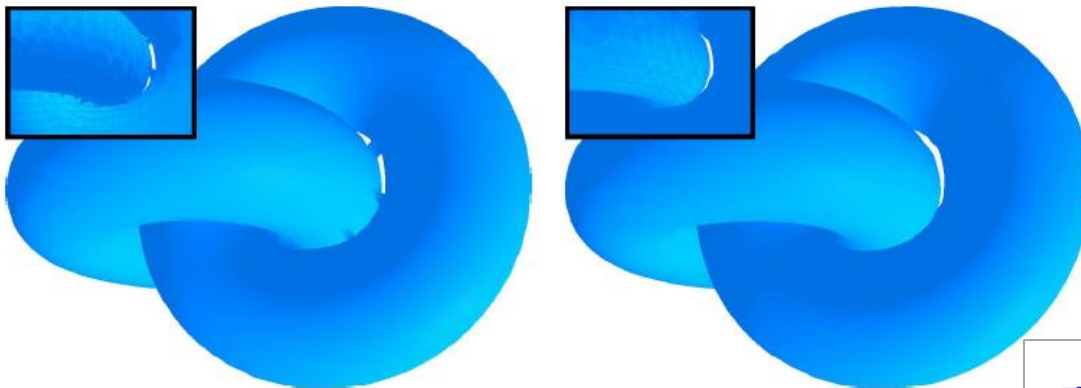
Caso 6



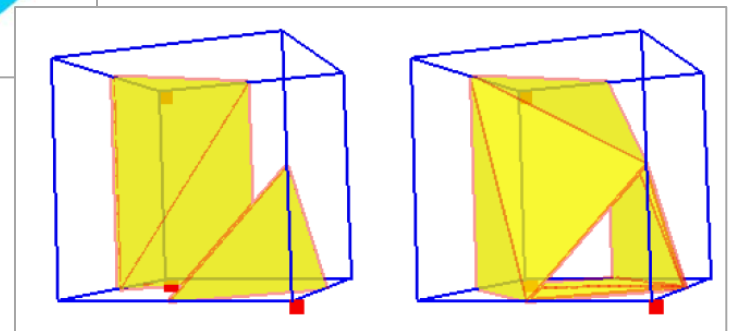
Conversões de Modelo de Representação

Implícito para
Paramétrico

Marching Cubes:
No trabalho original existiam casos **ambíguos** ...



Caso 6



Conversões de Modelo de Representação

Implícito para
Paramétrico

Marching Cubes: No trabalho original existiam casos **ambíguos** ...

Efficient implementation of Marching Cubes' cases with topological guarantees
 THOMAS LEWINER^{1,2}, HÉLIO LOPES¹, ANTÔNIO WILSON VIEIRA^{1,3} AND GIOVAN TAVARES¹

¹ Department of Mathematics — Pontifícia Universidade Católica — Rio de Janeiro — Brazil
² Géométrica Project — INRIA — Sophia Antipolis — France
³ CCT — Universidade de Montes Claros — Brazil
 {t.lewiner, lopes, awilson, tavares}@mat.puc-rio.br.

Abstract. Marching Cubes' methods first offered visual access to experimental and theoretical data. The implementation of this method usually relies on a small lookup table. Many enhancements and optimizations of Marching Cubes still use it. However, this lookup table can lead to cracks and inconsistent topology. This paper introduces a full implementation of Chernyaev's technique to ensure a topologically correct result, i.e. a manifold mesh, for any input data. It completes the original paper for the ambiguity resolution and for the scalability of the implementation. Moreover, the cube interpolation provided here can be used in a wider range of methods. The source code is available online.

Keywords: *Marching Cubes. Isosurface extraction. Implicit surface tiler. Topological guarantees.*

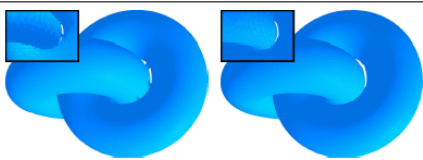


Figure 1: *Implicit surface of link of knot generated by the classical Marching Cubes algorithm, and ours.*

1 Introduction

Isosurface extractors and implicit surface filters opened up visual access to experimental and theoretical data, such as medical images, mechanical pieces, sculpture scans, mathematical surfaces, and physical simulation by finite elements methods. Among those techniques, the Marching Cubes [5] produces a surface out of a sampling of a scalar field $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. It has been enhanced to a wide range of applications, from geological reconstruction [10], medical images to 3D scanning (see [4] for an original use in the Digital Michelangelo Project). Although this paper focuses on surface reconstruction from sampled data, the tilings of cubes introduced here can be used in simple reconstruction methods for synthetic data [2, 13] in order to guarantee the topological consistency of the result when the precision of the result is limited.

Marching Cubes [5] has become the reference method when the sampled scalar field is structured on a cuberille grid. It classifies vertices as positive or negative, according to their comparison with a given isovalue. Then, it uses a lookup table to tile the surface inside the cube. This method has been enhanced and generalized in various directions, especially to reduce the number of cubes to be evaluated. However, most of those modern techniques still use a simple lookup table, which does not ensure the topological consistency of the result.

Prior work. The main obstacles of the Marching Cubes' derived methods are the ambiguities inherent to data sampling. Those ambiguities can appear on the faces of a cube,

Preprint MAT 0503, communicated on December 17th, 2002 to the Department of Mathematics, Pontifícia Universidade Católica — Rio de Janeiro, Brazil. The corresponding work was published in the Journal of Graphics Tools, volume 8, number 3, pp. 1-15, ACM Press, 2003.

Leitura Complementar:
Efficient implementation of Marching Cubes' cases with topological guarantees
 T. Lewiner et al.
 Journal of Graphics Tools
 2003

Conversões de Modelo de Representação

Paramétrico
para Implícito

Fast Marching Method:

É um caso particular do método “**Level Sets**”, desenvolvido por **J. A. Sethian**.

Conversões de Modelo de Representação

Paramétrico
para Implícito

Fast Marching Method:

É um caso particular do método “**Level Sets**”, desenvolvido por **J. A. Sethian**.

Desenvolvido para resolver de forma eficiente a propagação de frente.

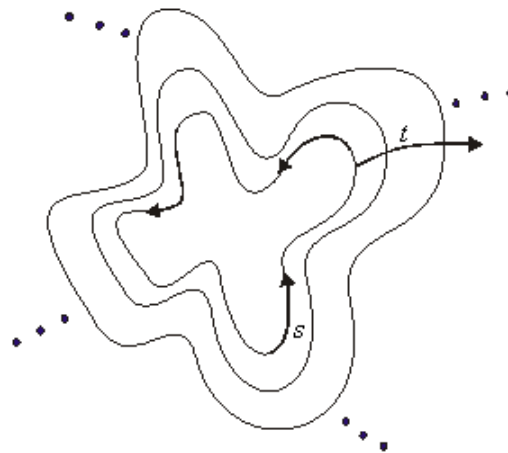
Conversões de Modelo de Representação

Paramétrico
para Implícito

Fast Marching Method:

É um caso particular do método “**Level Sets**”, desenvolvido por **J. A. Sethian**.

Desenvolvido para resolver de forma eficiente a propagação de frente.



Conversões de Modelo de Representação

Paramétrico
para Implícito

Fast Marching Method:

É um caso particular do método “**Level Sets**”, desenvolvido por **J. A. Sethian**.

Desenvolvido para resolver de forma eficiente a propagação de frente.

Este problema consiste em calcular a nova posição de uma superfície quando um campo F é aplicado à curva.

Conversões de Modelo de Representação

Paramétrico
para Implícito

Fast Marching Method:

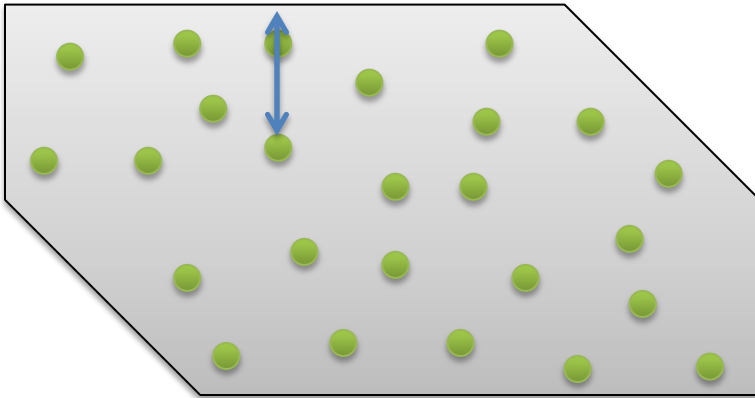
É um caso particular do método “**Level Sets**”, desenvolvido por **J. A. Sethian**.

Desenvolvido para resolver de forma eficiente a propagação de frente.

Este problema consiste em calcular a nova posição de uma superfície quando um campo F é aplicado à curva. Ex: Campo Normal

Conversões de Modelo de Representação

Paramétrico
para Implícito

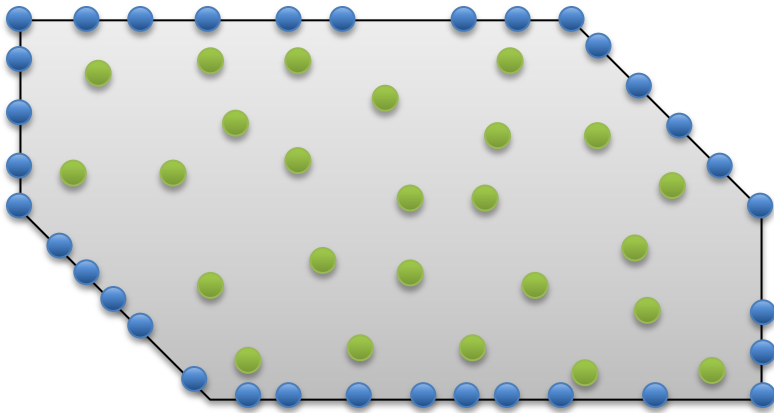


Como propagar a distância?



Conversões de Modelo de Representação

Paramétrico
para Implícito

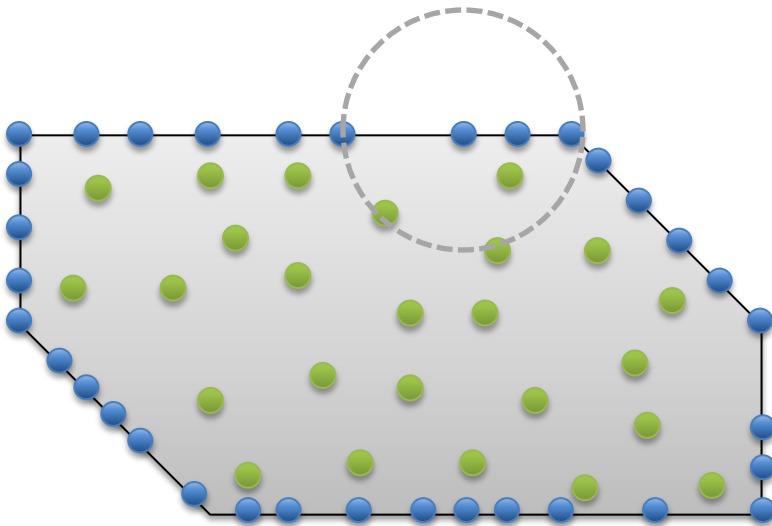


Exemplo



Conversões de Modelo de Representação

Paramétrico
para Implícito



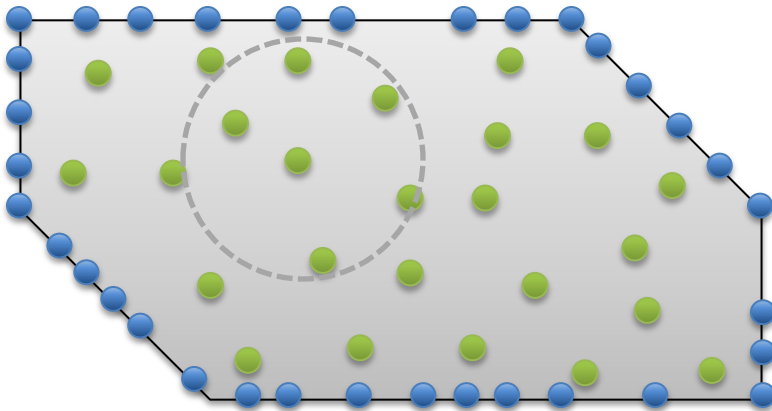
#Inicialização

- 1) Inicializa distância d com ∞
- 2) Para todo *Ponto de Superfície* P
Para cada vizinho N
Se $d_N > |P-N|$, Então $d_N = |P-N|$, $S(N)=P$
FimPara
Fim Para

#Pontos de Superfície
#Fast Marching Method

Conversões de Modelo de Representação

Paramétrico
para Implícito



#Propagação

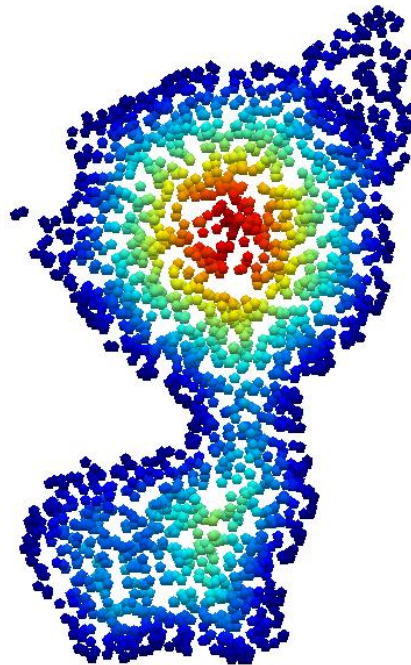
- 1) Cria uma Pilha Q com pontos com $d_N < \infty$
- 2) Enquanto Q não está vazia
 $P_q = Q.pop()$
 Para cada vizinho N
 Se $d_N > |P_q - N|$, Então
 $d_N = |P_q - N|$, $S(N) = P$
 $Q.push(N)$
 FimSe
FimPara
FimEnquanto

#Pontos de Superfície
#Fast Marching Method

Conversões de Modelo de Representação

Paramétrico
para Implícito

Exemplo



Conversões de Modelo de Representação

Implícito para
Paramétrico

Fast Marching method

Level Set Methods
and
Fast Marching Methods

Evolving Interfaces in Computational Geometry,
Fluid Mechanics, Computer Vision,
and Materials Science

J.A. Sethian

Dept. of Mathematics
University of California
Berkeley

Cambridge University Press, 1999
downloaded from:
<http://math.berkeley.edu/~sethian/level.set.html>.

Leitura Complementar:
Level Sets and Fast Marching Methods
J. A. Sethian.
Cambridge University Press
1999